

PRINCIPIO DE INDUCCIÓN

- Axioma del Buen Orden en los naturales
- Principio de Inducción (I)
- Principio de Inducción (II)
- Principio Fuerte de Inducción

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70



DMATIC ETSISI

Bibliografía básica:

- Matemática Discreta. Libro de la asignatura. Cap. 4
- Matemática Discreta y sus aplicaciones.
K.H. Rosen. Mc Graw Hill. Cap. 3

Material de trabajo:

- Matemática Discreta. Problemas. Hoja 3.
- Actividad de Aprendizaje (Moodle)

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, dark green font. The '99' is significantly larger and more prominent than the rest of the text. The logo is set against a light blue and orange gradient background that resembles a stylized wave or a banner.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Axioma del Buen Orden en los naturales: Todo conjunto no vacío de números naturales tiene mínimo.

Principio de Inducción (I): Sea P una propiedad de los números naturales que satisface las dos condiciones siguientes:

- P(0) es verdadera.
- Para todo $n \geq 0$, si P(n) es verdadera, entonces P(n+1) también es verdadera.

Entonces P(n) es verdadera para todo $n \geq 0$.



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVIA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Cartagena99

Esquema:

- Paso base: **Verificar** $P(0)$
- Paso de inducción:
 - **Escribir** la propiedad $P(n)$ en un n genérico, $n \geq 0$ (H. I.) Hipótesis de inducción
 - **Plantear y verificar** la propiedad en $n+1$, $P(n+1)$ usando (H.I.) + álgebra

Ejemplo: $0+1+2+\dots+n = \frac{(1+n)n}{2} \quad \forall n \geq 0 \quad (n \geq 1)$

Paso base: ¿la igualdad es cierta en $n=0$?

$$\text{¿ } 0 = (1+0)0/2 \text{ ? } \quad 0=0 \quad \text{es cierta}$$

Paso de inducción:

Suponemos $1+2+\dots+n = (1+n)/2$ en un $n \geq 0$ (H.I.)

$$\text{¿ } 1 + 2 + \dots + n + (n+1) = (1+(n+1))(n+1)/2 \text{ ?}$$

The logo for Cartagena99, featuring the text 'Cartagena99' in a stylized font with a blue and orange gradient background.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Por lo tanto la igualdad es cierta $\forall n \geq 0$



Gauss 1777-1855

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{(1+n)n}{2}$$

$$1 + 2 + \dots + 100 = \frac{(1+100)100}{2} = \frac{101 \cdot 100}{2} = 5050$$

$$\begin{aligned} 100 + 99 + 98 + \dots + 2 + 1 &= X \\ 1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100 &= X \end{aligned}$$

$$101 + 101 + 101 + \dots + 101 + 101 = 2X$$

¡100 VECES!

$$\Rightarrow 100 \times 101 = 2X$$

(Entonces)

$$100 \times 101 = X$$



Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP: 689 45 44 70

Principio de Inducción (I): Sea P una propiedad de los números naturales que satisface las dos condiciones siguientes:

- P(k) es verdadera en un k particular.
- Para todo $n \geq k$, si P(n) es verdadera, entonces P(n+1) también es verdadera.

Entonces P(n) es verdadera para todo $n \geq k$.

Ejemplos: Usar el Principio de inducción para probar las siguientes igualdades

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1 \quad \forall n \geq 0$$

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2 \quad \forall n \geq 1$$

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than the 'Cartagena' part. The logo is set against a light blue and orange background with a wavy, water-like effect.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Ejemplos: Usar el Principio de inducción para probar las siguientes propiedades (desigualdades)

$$2^n < n! \quad \forall n \geq 4$$

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ \sqrt{2 + a_{n-1}} & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

Es monótona y acotada

Ejemplos: Usar el Principio de inducción para probar las siguiente propiedad (geométrica)

La suma de los ángulos interiores de un polígono convexo de n lados (n ángulos) $n \geq 3$, vale $(n-2)\pi$

Paso base:

Paso de inducción:

The logo for Cartagena99, featuring the text 'Cartagena99' in a stylized font with a blue and orange gradient background.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Suma = Suma1 + Suma2

¿Cuál es la conexión entre el paso base y el de inducción?

Sea $P(n)$ una propiedad que depende de los números naturales de la que se sabe que $P(8)$ es cierta y para todo $n \geq 5$ si $P(n)$ es cierta, entonces $P(n+1)$ también es cierta. Se puede garantizar que:

- a. $P(n)$ es cierta para todo $n \geq 5$
- b. $P(n)$ es cierta para todo $n \geq 8$
- c. $P(n)$ es cierta en $n=8$

Sea $P(n)$ una propiedad que depende de los números naturales de la que se sabe que $P(7)$ es cierta y para todo $n \geq 10$ si $P(n)$ es cierta, entonces $P(n+1)$ también es cierta. Se puede garantizar que:

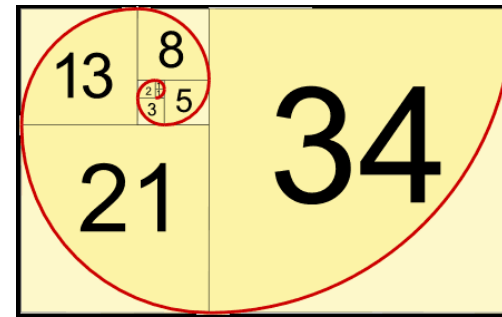
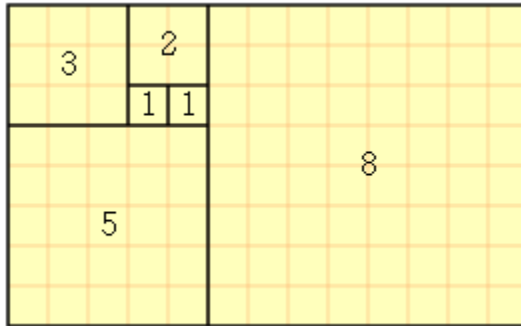
- a. $P(n)$ es cierta para todo $n \geq 7$
- b. $P(n)$ es cierta para todo $n \geq 10$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Sucesión de Fibonacci



$$F(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 1 \\ 1 & \text{si } n = 2 \\ F(n-1) + F(n-2) & \text{si } n \geq 3 \end{cases}$$

Cartagena99

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Principio de Inducción (II): Sea P una propiedad de los números naturales que satisface las dos condiciones siguientes:

- $P(0)$, $P(1)$ son verdaderas.
- Para todo $n \geq 0$, si $P(n)$ y $P(n+1)$ son verdaderas, entonces $P(n+2)$ también es verdadera.

Entonces $P(n)$ es verdadera para todo $n \geq 0$.

Ejemplo: Usar el método de inducción para probar la igualdad de las siguientes expresiones $\forall n \geq 0$.

$$A(n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 0 \\ 5 & \text{si } n = 1 \\ 5A(n-1) & \text{si } n \geq 2 \end{cases} \quad B(n) = 2^n + 3^n$$



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
 LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
 CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

Principio Fuerte de Inducción: Sea P una propiedad de los números naturales que satisface las dos condiciones siguientes:

- $P(0)$ es verdadera.
- Para todo $n \geq 0$, si $P(0), P(1), \dots, P(n)$ son verdaderas, entonces $P(n+1)$ también es verdadera.

Entonces $P(n)$ es verdadera para todo $n \geq 0$.

Ejemplo: Usar el Principio Fuerte de inducción para probar que todo natural $n \geq 2$ se puede descomponer en producto de uno o varios números primos.

Paso base: $P(2)$ se cumple pues 2 es primo.

Paso de Inducción: Sea $n \geq 2$ y supongamos que $P(2), P(3), \dots, P(n)$ se cumplen.

Si $n+1$ es primo, entonces $P(n+1)$ es cierta.

Si $n+1$ no es primo, entonces $n+1 = h \cdot k$ con $2 \leq h, k < n+1$.

The logo for Cartagena99 features the text 'Cartagena99' in a stylized, green, serif font. The '99' is significantly larger and more prominent than 'Cartagena'. The text is set against a light blue background with a white swoosh underneath.

CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

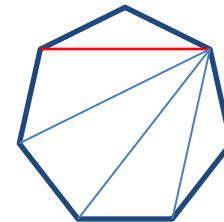
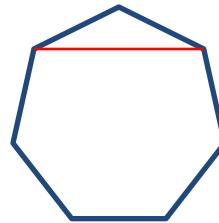
Ejemplo: Probar que todo polígono, convexo o no, es triangularizable.

Caso 1: Polígono convexo

Paso base:



Paso de inducción:



Caso 1: Polígono general

Paso base:



Paso de inducción:



CLASES PARTICULARES, TUTORÍAS TÉCNICAS ONLINE
LLAMA O ENVÍA WHATSAPP: 689 45 44 70

ONLINE PRIVATE LESSONS FOR SCIENCE STUDENTS
CALL OR WHATSAPP:689 45 44 70

